拡散型動的境界条件を有する線形熱方程式の基本解と拡散極限
(Fundamental solution and diffusion limits for the heat equation in a half-space with a diffusive dynamical boundary condition)

川上 竜樹

龍谷大学 先端理工学部

本講演では半空間 $\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)$ における拡散型動的境界条件を有する線型熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} \epsilon \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ \delta \partial_t u - k \Delta' u - \partial_{x_N} u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u = \phi & \text{in} \quad \Omega \times \{0\}, \\ u = \psi & \text{on} \quad \partial\Omega \times \{0\} \end{cases} \tag{HDD}$$

を考える. ここで $N \geq 2$, $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $k > 0$, $\partial_t := \partial/\partial t$, $\partial_{x_N} := \partial/\partial x_N$ である. また, Δ, Δ' はそれぞれ $\mathbb{R}^N$ または $\partial\Omega$ 上の Laplacian であり, 初期値 $\phi = (\phi^i, \phi^b)$ は $\Omega \times \partial\Omega$ 上の可測関数とする.

問題 (HDD) については, Fila-石毛-川上 (CCM '21) において, 有界な初期値に対して, 可解性と時間局所 $L^\infty(\Omega)$ 評価が得られている. また, $\phi^b = 0$ かつ ϕ^i が適当な重み付き空間に属する非有界な関数の場合についても, 可解性と時間局所評価を得ている (ZAMP '23). これらの研究においては, それまでの動的境界条件を有する非線形楕円型方程式の研究における手法を元に, 問題 (HDD) を非斉次動的境界条件を有する Laplace 方程式と斉次 Dirichlet 境界条件を有する非斉次熱方程式の連立系に書き換え, それぞれの基本解である Poisson 核と熱核を用いた解の表現公式を用いて解析している. 一方, ここで得られた解の表現は, 元の問題を分割し, それぞれを別々に構成しているため符号変化する項を含んでおり, 本来打ち消しあっている可能性のある特異性を含んでおり, 非線形問題等への応用には不可欠な最適な減衰評価等を得ることは困難である.

ここでは, 問題 (HDD) の基本解を直接構成することで, 基本解の各点評価を与え, 解の最適な時間大域的な減衰評価を得た結果について紹介する. また, この評価の応用として, 領域内部の large diffusion limit (i.e. $\varepsilon \to 0^+$) と境界上における small diffusion limit (i.e. $k \to 0^+$) についても合わせて紹介する.

本講演内容は石毛和弘氏 (東京大学), 片山翔氏 (慶應義塾大学) との共同研究に基づく.